Univerzitet u Zenici
Filozofski fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 17.02.2014.

Pismeni ispit iz Linearne algebre

Pravila: Svaku formulu koju mislite koristit, u sva 4 zadatka, obavezno napisati, kao i značenja simbola iz formule. Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka.

1. Neka je $\mathcal{V}$ vektorski prostor $\mathbb{R}^3$ generisan vektorima x_1, x_2, x_3 (x_1, x_2 i x_3 su linearno nezavisni vektori)

$$\mathcal{V} = span\left\{ x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

Ovo znači da za $\forall v \in \mathcal{V}$ $\exists$ jedinstveni $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ t.d. $v = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$. Sa $\mathcal{V}^*$ označimo skup svih linearnih preslikavanja sa $\mathcal{V}$ u $\mathbb{R}$ tj.

$$\mathcal{V}^* = \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathbb{R}) = \{T : \mathcal{V} \to \mathbb{R} \mid T \text{ je linearno}\}$$

i za svako $j \in \{1, 2, 3\}$ definišimo $T_j \in \mathcal{V}^*$ sa

$$T_j(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) = a_j$$

(50%)(a) Pokazati da je $\mathcal{B}^* = \{T_1, T_2, T_3\}$ baza za $\mathcal{V}^*$.
(50%)(b) Odrediti T_1, T_2 i T_3.

Napomena: Rješenja za (a) i (b) su nezavisna jedno od drugog. Prostor $\mathcal{V}^*$ se naziva dualni prostor prostora $\mathcal{V}$, a baza $\mathcal{B}^*$ se naziva dualna baza baze $\mathcal{B}$.

2. Posmatrajmo operator $T : \mathcal{P}_3 \longrightarrow \mathcal{P}_3$ na realnom vektorskom prostoru $\mathcal{P}_3$ svih polinoma sa realnim koeficijentima i stepena najviše 3, gdje za svaki polinom $p(x)$ iz $\mathcal{P}_3$ imamo $T(p(x)) = x\, p'(x)$, proizvod x-a sa izvodom $p'(x)$. Pokazati da je T linearni operator . Odrediti matricu (koordinata) A za operator T u odnosu na bazu $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ i izračunati $A[q(x)]_{\mathcal{B}}$ gdje je $q(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + q_3 x^3$.

3. Data je matrica $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. U $\mathbb{R}^n$ definišimo proizvod sa

$$\langle x, y \rangle = (Ax)^\top Ay$$

(a) Diskutovati za kakve matrice A je dati proizvod unutrašnji proizvod.
(b) Diskutovati za kakve matrice A, za dati proizvod vrijedi jednakost $\langle x, y \rangle = x^\top y$.

4. U unitarnom prostoru $\mathbb{R}^4$, sa standardnim skalarnim proizvodom, zadan je podprostor $\mathcal{M}$ razapet vektorima $(2, 1, 0, 0)^\top$, $(1, 1, 1, 1)^\top$. Nađite jednu bazu za ortogonalni komplement od $\mathcal{M}$ te odredite ortogonalnu projekciju vektora $a = (3, -4, 5, -5)^\top$ na $\mathcal{M}$.

(#) Neka je V vektorski podprostor prostora $\mathbb{R}^3$ generisan vektorima (x_1, x_2 i x_3 su linearno nezavisni vektori)

$$V = \text{span}\left\{ x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ovo znači da za $\forall v \in V$ $\exists$ jedinstveni $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ t. d.

$$v = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3.$$

Sa V^* označimo skup svih linearnih preslikavanja sa V u $\mathbb{R}$ tj.

$$V^* = \mathcal{L}(V, \mathbb{R}) = \{ T : V \to \mathbb{R} \mid T \text{ je linearno} \}$$

i za svako $j \in \{1, 2, 3\}$ definišimo $T_j \in V^*$ sa

$$T_j(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) = a_j.$$

Pokazati da je $\mathcal{B}^* = \{T_1, T_2, T_3\}$ baza za V^*, i odrediti T_1, T_2 i T_3.

Rj: Da bi dokazali da je $\mathcal{B}^*$ baza za V^*, trebamo pokazati da je skup $\{T_1, T_2, T_3\}$ linearno nezavisan i da se svaka linearna transformacija $T \in V^*$ može prikazati kao linearna kombinacija elemenata T_1, T_2 i T_3.

(a) Pokažimo da je skup $\{T_1, T_2, T_3\}$ linearno nezavisan.

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ i posmatrajmo $\alpha T_1 + \beta T_2 + \gamma T_3 = \mathbf{0}$ $(\mathbf{0} \in V^*)$

Izaberimo proizvoljan $x \in V$ ($\Rightarrow \exists a_1, a_2, a_3$ t. d. $x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$)

$$(\alpha T_1 + \beta T_2 + \gamma T_3)(x) = \mathbf{0}(x)$$

$$\alpha T_1(x) + \beta T_2(x) + \gamma T_3(x) = 0 \quad (0 \in \mathbb{R})$$

$$\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 = 0 \xRightarrow{x \text{ proizv.}} \alpha = \beta = \gamma = 0$$

$\Rightarrow$ $\{T_1, T_2, T_3\}$ je linearno nezavisan skup

(b) Pokažimo da $\{T_1, T_2, T_3\}$ generišu $\mathcal{V}^*$.

Neka je $T \in \mathcal{V}^*$ proizvoljan, i neka je $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$ proizvoljan element iz $\mathcal{V}$ ($x \in \mathcal{V}$). Tad

$$T(x) = T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) = \underset{\overset{\parallel}{T_1(x)}}{\alpha_1} T(x_1) + \underset{\overset{\parallel}{T_2(x)}}{\alpha_2} T(x_2) + \underset{\overset{\parallel}{T_3(x)}}{\alpha_3} T(x_3)$$

$$=$$

$$= \underbrace{T(x_1)}_{\substack{\in \mathbb{R} \\ (\text{npr. } \beta_1)}} T_1(x) + \underbrace{T(x_2)}_{\substack{\in \mathbb{R} \\ (\text{npr. } \beta_2)}} T_2(x) + \underbrace{T(x_3)}_{\substack{\in \mathbb{R} \\ (\text{npr. } \beta_3)}} T_3(x)$$

$$= \beta_1 T_1(x) + \beta_2 T_2(x) + \beta_3 T_3(x)$$

$$= (\beta_1 T_1 + \beta_2 T_2 + \beta_3 T_3)(x)$$

$\Rightarrow$ za proizvoljan $T \in \mathcal{V}^*$ odredili smo $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$ t.d.

$T = \beta_1 T_1 + \beta_2 T_2 + \beta_3 T_3$ $\Rightarrow$ $\{T_1, T_2, T_3\}$ generiše $\mathcal{V}^*$.

(a) i (b) $\Rightarrow$ $\mathcal{B}^* = \{T_1, T_2, T_3\}$ je baza za $\mathcal{V}^*$.

(c) Odredimo T_1, T_2 i T_3.

Ove linearne transformacije ćemo odrediti iz definicije

$$T_1(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) = a_1$$

$$T_2(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) = a_2$$

$$T_3(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) = a_3$$

Neka je $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{V}$ proizvoljan vektor. Odredimo a_1, a_2 i a_3 t.d.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & y_1 \\ -1 & 1 & 3 & y_2 \\ 3 & -1 & -2 & y_3 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & 0 & 7y_1 - 2y_2 - 3y_3 \\ 0 & 0 & 1 & -2y_1 + y_2 + y_3 \end{array}\right]$$

$\rightarrow \quad a_1 = y_1, \qquad a_2 = 7y_1 - 2y_2 - 3y_3, \qquad a_3 = -2y_1 + y_2 + y_3$

Prema tome za proizvoljan vektor $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{V}$ vrijedi

$$T_1(v) = T_1\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1$$

$$T_2(v) = T_2\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 7v_1 - 2v_2 - 3v_3$$

$$T_3(v) = T_3\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = -2v_1 + v_2 + v_3$$

Napomena:

Prostor $\mathcal{V}^*$ se naziva dualni prostor prostora $\mathcal{V}$, a baza $\mathcal{B}^*$ se naziva dualna baza baze $\mathcal{B}$.

(#) Posmatrajmo operator $T: \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ na realnom vektorskom prostoru $\mathcal{P}_3$ svih polinoma sa realnim koeficijentima i stepenom najviše 3, gdje je za svaki polinom $p(x)$ iz $\mathcal{P}_3$ imamo $T(p(x)) = x p'(x)$, proizvod x-a sa izvodom $p'(x)$ polinoma $p(x)$. Pokazati da je T linearni operator. Odrediti matricu (koordinata) A za operator T u odnosu na bazu $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ i izračunati $A[g(x)]_{\mathcal{B}}$ gdje je $g(x) = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + g_3 x^3$.

Rj.

Izaberimo proizvoljno $p(x) \in \mathcal{P}_3$ npr. $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$

Tada

$$T(p(x)) = x \cdot (b + 2cx + 3dx^2) = bx + 2cx^2 + 3dx^3$$

(a) Pokažimo da je T linearni operator.

Posmatraćemo dva proizvoljna polinoma $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ i $p_1(x) = a_1 + b_1 x + c_1 x^2 + d_1 x^3$

$$T(p(x) + p_1(x)) = x \cdot (a + bx + cx^2 + dx^3 + a_1 + b_1 x + c_1 x^2 + d_1 x^3)'$$

$$= x(b + 2cx + 3dx^2) + x(b_1 + 2c_1 x + 3d_1 x^2) = T(p(x)) + T(p_1(x)) \quad \ldots(1)$$

$\alpha \in \mathbb{R}$

$$T(\alpha p(x)) = x(\alpha(a + bx + cx^2 + dx^3))' = \alpha x \cdot (b + 2cx + 3dx^2) = \alpha T(p(x)) \quad \ldots(2)$$

Na osnovu (1) i (2) možemo zaključiti da je T linearni operator.

(b) Izračunajmo $A[g(x)]_{\mathcal{B}}$ gdje je A matrica koordinata od T.

$$q(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + q_3 x^3, \quad \mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$$

$$\Rightarrow \quad [q(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

$$p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \qquad T(p(x)) = bx + 2cx^2 + 3dx^3$$

$$A = [T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ [T(1)]_{\mathcal{B}} & [T(x)]_{\mathcal{B}} & [T(x^2)]_{\mathcal{B}} & [T(x^3)]_{\mathcal{B}} \\ | & | & | & | \end{pmatrix}$$

$$T(1) = 0 \Rightarrow [T(1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad T(x^2) = 2x^2 \Rightarrow [T(x^2)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(x) = x \Rightarrow [T(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad T(x^3) = 3x^3 \Rightarrow [T(x^3)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A\,[q(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ q_1 \\ 2q_2 \\ 3q_3 \end{pmatrix}$$

(#) Data je matrica $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$. U $\mathbb{R}^n$ definišimo proizvod sa

$$\langle x, y\rangle = (Ax)^T Ay$$

(a) Diskutovati za kakve matrice A, dati proizvod je unutrašnji proizvod.

(b) Diskutovati za kakve matrice A, za dati proizvod vrijedi jednakost $\langle x, y\rangle = x^T y$.

Rj. (a) Trebamo provjeriti da li vrijede četiri osobine unutrašnjeg proizvoda

(i) $\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}$, $\langle x,x\rangle \geq 0$ i $\langle x,x\rangle = 0$ akko $x=0$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix}, \quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} \Rightarrow Ax=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+\dots+a_{nn}x_n\end{pmatrix}$$ pa elemente

od Ax označimo sa $Ax=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

$$\langle x,x\rangle = (Ax)^T Ax = (c_1\ c_2\ \dots\ c_n)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n\end{pmatrix} = c_1^2+c_2^2+\dots+c_n^2 \in \mathbb{R}$$
$$\geq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}^n$$

$\langle x,x\rangle = 0$ akko $c_1^2+c_2^2+\dots+c_n^2=0$ akko $c_1=c_2=\dots=c_n=0$ akko

$$Ax=\mathbf{0} \iff \begin{matrix} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+\dots+a_{nn}x_n=0 \end{matrix} \iff x=0$$

(a ovo je tačno akko je A nesingularna matrica

tj. ako A ima inverz $\iff$ ako je matrica A ranga n)

Prema tome da bi vrijedila prva osobina matrica A mora biti nesingularna matrica.

(ii) $\langle x, \alpha y\rangle = \alpha \langle x, y\rangle$ za $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\langle x, y\rangle = (Ax)^T(\alpha A y) = (Ax)^T \alpha (Ay) = \alpha (Ax)^T (Ay) = \alpha \langle x, y\rangle$$

vrijedi druga osobina

(iii) $\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$

$$\langle x, y+z\rangle = (Ax)^T A(y+z) = (Ax)^T (Ay + Az) = (Ax)^T (Ay) + (Ax)^T (Az)$$

$$= \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle \Rightarrow$$ vrijedi treća osobina

(iv) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ (za realan prostor $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$)

$$\langle x, y\rangle = (Ax)^T Ay = \underbrace{(c_1\ c_2 \dots c_n)}_{=(Ax)^T} \underbrace{\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}}_{=Ay} =$$

$$= (d_1\ d_2 \dots d_n) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = (Ay)^T Ax = \langle y, x\rangle$$

vrijedi četvrta osobina

Za nesingularne matrice A dati proizvod je unutrašnji proizvod.

b) Da bi vrijedilo $\langle x, y\rangle = x^T y$ primijetimo da mora biti

$$(Ax)^T Ay = x^T y \iff x^T A^T A y = x^T y \iff A^T A = I$$

$$\iff A^{-1} = A^T$$

Da bi vrijedila data jednakost matrica A mora biti ortogonalna matrica.

#) U unitarnom prostoru $\mathbb{R}^4$, sa standardnim skalarnim proizvodom, zadan je podprostor M razapet vektorima $(2,1,0,0)^T$, $(1,1,1,1)^T$. Nađite jednu bazu za ortogonalni komplement od M te odredite ortogonalnu projekciju vektora $a=(3,-4,5,-5)^T$ na M.

Rj.:

$$M = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Trebamo odrediti bazu za $M^{\perp}$. Prisjetimo se

Za podskup M unitarnog prostora V, ortogonalni komplement $M^{\perp}$ od M je definiran sa

$$\underline{M^{\perp} = \{x \in V \mid \langle m, x\rangle = 0 \text{ za } \forall m \in M\}}$$

Mi tražimo $x = \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$ t.d. $\left\langle \begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\right\rangle = 0$ i $\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\right\rangle = 0$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$2a+b=0 \qquad\qquad a+b+c+d=0$$

$$\begin{bmatrix}2&1&0&0\\1&1&1&1\end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{array}{c}\begin{matrix}a&b&c&d\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&2&2\end{bmatrix}\end{array}$$

$\Rightarrow$ dvije promjenjive, uzimamo proizvoljno npr. $c=t$, $d=s$

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t+s\\-2t-2s\\t\\s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}t + \begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}s$$

ovo je baza za $M^{\perp}$.

Time smo dobili $M^{\perp} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

Prisjetimo se

Vektor m se naziva ortogonalna projekcija od v na $\mathcal{M}$ akko $v = m + n$ gdje je $m \in \mathcal{M}$ i $n \in \mathcal{M}^{\perp}$.

Mi imamo

$$\mathcal{M} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\} \quad i \quad \mathcal{M}^{\perp} = \left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Prvo odredimo $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ t.d.

$$\begin{pmatrix}3\\-4\\5\\-5\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \alpha = 1, \quad \beta = -1, \quad \gamma = 6, \quad \delta = -4$$

$$\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

Ortogonalna projekcija vektora $a = \begin{pmatrix}3\\-4\\5\\-5\end{pmatrix}$ na $\mathcal{M}$ je $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}$.